第27卷 第2期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 2
2010年04月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Apr. 2010

文章编号:1005-3085(2010)02-0353-05

奇异半正 Sturm-Liouville 方程边值问题的正解*

毛锦秀[1]， 赵增勤[1]， 许乃伟[2]

(1- 曲阜师范大学数学系，曲阜 273165； 2- 山东水利职业学院基础部，日照 276826)

摘 要: 本文研究超线性 Sturm-Liouville 方程的边值问题，其中非线性项可变号且在端点处具有奇异性。利用锥上的不动点指数定理和平移变换的方法，我们得到奇异半正边值问题至少存在一个更广泛意义的正解及正解的性质。本文考虑的是一般形式的方程和边值条件，改进了之前的结果。

关键词: 奇异半正边值问题；正解；锥

分类号: AMS(2000) 34B15 **中图分类号**: O175.8 **文献标识码**: A

1 引言

本文研究如下微分方程边值问题

$$\begin{cases} -(p(t)u'(t))' = f(t,u(t)) + g(t,u(t)), \quad 0<t<1, \\ \alpha u(0) - \beta \lim_{t\to 0+} p(t)u'(t) = 0, \\ \gamma u(1) + \delta \lim_{t\to 1-} p(t)u'(t) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

的正解，其中 $f\in C((0,1)\times[0,+\infty),[0,+\infty))$，$g\in C((0,1)\times[0,+\infty),(-\infty,+\infty))$。

文献 [1] 中研究了不具奇异性的非线性半正边值问题，应用锥上的不动点定理得出方程有正解。最近，在文献 [2] 中，赵通过范数形式的锥拉伸压缩不动点定理，得到方程的 $C_p^1[0,1]$ 正解。然而，文献 [1] 中考虑非线性项可变号，但没有考虑非线性项是奇异的和 $C_p^1[0,1]$ 正解。文献 [2] 考虑了奇异和 $C_p^1[0,1]$ 正解，但没有考虑非线性项可变号。故边值问题 (1) 是文献 [1] 和文献 [2] 的直接推广。已有的研究半正的文章，见文献 [3-11]。

受上述工作的启发，本文研究半正边值问题 (1)，并且考虑一般形式的方程和边值条件，更具有普遍性。应用锥上的不动点指数定理和平移变换，得到了 $C_p^1[0,1]$ 正解存在的结论。

我们列出本文使用的假设。

(H_1) $p\in C^1((0,1),(0,+\infty))$，且

$$\int_0^1 \frac{1}{p(s)}\mathrm{d}s < +\infty.$$

(H_2) 对任意 $t\in(0,1)$，$u\in[0,+\infty)$，存在函数 $q\in C((0,1),[0,+\infty))$ 使得

$$|g(t,u)| \le q(t).$$

收稿日期: 2007-11-27. **作者简介**: 毛锦秀 (1982年5月生)，女，博士. 研究方向：非线性泛函.

***基金项目**: 国家自然科学基金 (10871116)；高教博士点专项科研基金 (200804460001).

(H_3) 存在连续函数 $\varphi:(0,1)\to[0,+\infty)$，$h:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$，使得 $f(t,u)\le\varphi(t)h(u)$，且

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(t,u)}{u}=0,\quad \lim_{u\to+\infty}\frac{f(t,u)}{u}=+\infty,$$

在 $(0,1)$ 的任意闭子区间上一致成立。

(H_4) 令

$$\xi=\min\left\{\frac{r_1}{4\max_{0\le t\le 1}G(t,t)},\ \frac{r_1\varepsilon}{2}\right\},$$

其中

$$\varepsilon=\Big(\int_0^1\frac{\mathrm{d}\tau}{p(\tau)}\Big)^{-1}.$$

r_1 为由 (H_3) 中

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(t,u)}{u}=0$$

可知，对 $\frac{1}{2L}>0$，存在 $r_1>0$，对任意的 $0<u\le r_1$，有

$$f(t,u)\le\frac{u}{2L},\qquad L=\max_{0\le t\le 1}\int_0^1G(t,s)\mathrm{d}s.$$

$$\int_0^1q(t)\mathrm{d}t<\xi,\quad \frac{\xi}{\max\limits_{0\le\tau\le\xi}h(\tau)+2}>\int_0^1G(t,t)(\varphi(t)+q(t))\mathrm{d}t,$$

其中 $G(t,s)$ 是相应于边值问题 (1) 的线性问题的 Green 函数。

$$\varepsilon=\Big(\int_0^1\frac{\mathrm{d}\tau}{p(\tau)}\Big)^{-1}.$$

若函数 $u(t)\in C[0,1]\bigcup C^2(0,1)$ 满足边值问题 (1)，则称 $u(t)$ 为边值问题 (1) 的解。若解 $u(t)$ 使得 $\lim\limits_{t\to 0+}p(t)u'(t)$ 与 $\lim\limits_{t\to 1-}p(t)u'(t)$ 都存在有限，则称为 $C_p^1[0,1]$ 解。若解 $u(t)$ 在 $(0,1)$ 上恒正，则称为正解。

注1 若在边界条件中 $\beta\neq 0$，且 $\delta\neq 0$ 时，则 (1) 的解必是 $C_p^1[0,1]$ 解。当 $\beta=0$，或者 $\delta=0$ 时，(1) 的解不一定是 $C_p^1[0,1]$ 解。

注2 显然，当 $\lim\limits_{t\to 0+}p(t)u'(t)$ 存在有限时，$\lim\limits_{t\to 0+}u'(t)$ 不一定存在，同理，当 $\lim\limits_{t\to 1-}p(t)u'(t)$ 存在有限时，$\lim\limits_{t\to 1-}u'(t)$ 不一定存在，从而 $C_p^1[0,1]$ 解是依赖于 $p(t)$ 的更广泛意义的解。当 $p(t)$ 在 $t=0$，$t=1$ 点极限存在非零时，$C_p^1[0,1]$ 解是一般 $C^1[0,1]$ 解的意义。

本文的主要结果如下。

定理1 若 (H_1)-(H_4) 成立，那么奇异超线性半正边值问题 (1) 至少有一个 $C_p^1[0,1]$ 正解 u_0，且存在常数 $k>0$，使得 $u_0(t)\ge kG(t,t)$，$t\in[0,1]$。

2 定理的证明

令 $X=C[0,1]$，定义 $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$，令 $Q=\{u\in X\mid u(t)\ge\varepsilon\|u\|G(t,t),t\in[0,1]\}$。

我们要用到函数

$$[y(t)]_+=\begin{cases}y(t), & y(t)\ge 0,\\ 0, & y(t)<0.\end{cases}$$

由 (H_4) 可知

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)q(s)\mathrm{d}s\le\int_0^1 G(t,t)q(s)\mathrm{d}s<+\infty,$$

显然，$x(t)$ 是边值问题 (1) 当非线性项为 $q(t)$ 时的解。易知，$x(t)$ 为 $C_p^1[0,1]$ 正解。

另外，对固定的 $u(t)\in Q$，不妨设 $N=\max\limits_{0\le t\le 1}u(t)$，则 $[u(s)-x(s)]_+\le u(s)\le\|u\|\le N$。定义算子 A 如下

$$Au(t)=\int_0^1 G(t,s)\big[f(s,[u(s)-x(s)]_+)+g(s,[u(s)-x(s)]_+)+q(s)\big]\mathrm{d}s,\quad 0\le t\le 1.$$

若 $u(t)$ 为算子 A 的正不动点，即 $u(t)=Au(t)$，简单计算有

$$-(p(t)u'(t))'=f(t,[u(t)-x(t)]_+)+g(t,[u(t)-x(t)]_+)+q(t),\tag{2}$$

$$\alpha u(0)-\beta\lim_{t\to 0+}p(t)u'(t)=0,\qquad \gamma u(1)+\delta\lim_{t\to 1-}p(t)u'(t)=0.\tag{3}$$

故若 (H_1)-(H_4) 成立，则算子 A 在 $C[0,1]$ 中的正不动点必为 (2),(3) 的正解。

1) 首先易证算子 A 映 Q 到 Q，且为全连续算子。

2) 其次，令 $Q_{r_1}=\{u\in Q\mid\|u\|<r_1\}$。我们证 $i(A,Q_{r_1},Q)=1$。事实上，对任意的 $0<u\le r_1$，有 $f(t,u)\le\frac{u}{2L}$。则由 (H_4) 可知，对任意的 $u\in\partial Q_{r_1}$，

$$\begin{aligned}\|Au\|&\le\max_{0\le t\le 1}\int_0^1 G(t,s)\Big(\frac{1}{2L}\big[u(s)-x(s)\big]_++2q(s)\Big)\mathrm{d}s\\&\le 2\max_{0\le t\le 1}G(t,t)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s+\frac{r_1}{2L}\max_{0\le t\le 1}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\\&<\frac{r_1}{2}+\frac{r_1}{2}=r_1=\|u\|.\end{aligned}\tag{4}$$

故对任意的 $u\in\partial Q_{r_1}$，$\mu\ge 1$，有 $Au\ne\mu u$，则由不动点指数的性质知 $i(A,Q_{r_1},Q)=1$。

3) 再证存在常数 $R>r_1$，使 $i(A,Q_R,Q)=0$。选取 $[\nu,\omega]\in(0,1)$，取

$$M>2\Big[\varepsilon\nu(1-\omega)\max_{\nu\le t\le\omega}\int_\nu^\omega G(t,s)\mathrm{d}s\Big]^{-1}.$$

由 (H_3) 知，存在常数 $R_1>r_1$，使 $f(t,u)\ge Mu$, $t\in[\nu,\omega]$, $u\ge R_1$。令

$$R\ge\max\Big\{\frac{2R_1}{\varepsilon\nu(1-\omega)},2R_1\Big\},$$

显然 $R>R_1>r_1$，下证 $u\not\ge Au$, $u\in\partial Q_R$。

事实上，若不然，则存在 $y_1\in Q_R$ 使 $y_1\ge Ay_1$，因为 $y_1(t)\ge\varepsilon\|y_1\|G(t,t)=\varepsilon RG(t,t)$。而

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)q(s)\mathrm{d}s\le G(t,t)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s\le\frac{1}{\varepsilon R}y_1(t)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s,\tag{5}$$

故

$$y_1(t)-x(t)\geq\Big(1-\frac{\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s}{\varepsilon R}\Big)y_1(t)$$

$$\geq\frac{1}{2}\varepsilon\|y_1\|G(t,t)\geq\frac{1}{2}\varepsilon R\nu(1-\omega)\geq R_1,\quad t\in[\nu,\omega].$$

$$R\geq y_1(t)\geq\int_\nu^\omega G(t,s)f\big(s,(y_1(s)-x(s))\big)\mathrm{d}s$$

$$\geq\int_\nu^\omega G(t,s)M[y_1(s)-x(s)]\mathrm{d}s\geq\frac{1}{2}\varepsilon R\nu(1-\omega)M\int_\nu^\omega G(t,s)\mathrm{d}s,\quad\forall\, t\in[0,1].$$

从而

$$M\leq 2\Big[\varepsilon\nu(1-\omega)\max_{\nu\leq t\leq\omega}\int_\nu^\omega G(t,s)\mathrm{d}s\Big]^{-1}.$$

这与 M 的选取矛盾，所以由不动点指数的性质就有 $i\,(A,Q_R,Q)=0$。

4) 最后，由不动点指数的可加性知 $i\,(A,Q_R\setminus Q_{r_1},Q)=-1$。所以 A 在 $Q_R\setminus Q_{r_1}$ 上至少有一个不动点 $z(t)$ 且满足 $r_1\leq\|z\|\leq R$。

因为 $z(t)\geq\varepsilon\|z\|G(t,t)\geq\varepsilon r_1G(t,t)$，同 (5) 式，我们有 $z(t)-x(t)\geq\frac{1}{2}z(t)\geq 0$，故 $z(t)$ 满足 (2),(3) 且 $[z(t)-x(t)]_+=z(t)-x(t)$。易证，$z(t)$ 是 $C_p^1[0,1]$ 解。令

$$u_0(t)=z(t)-x(t)\geq\frac{1}{2}z(t)\geq\frac{\varepsilon r_1}{2}G(t,t)=kG(t,t),\quad t\in(0,1).$$

因为 $(p(t)z'(t))'=(p(t)u_0'(t))'+q(t)$，因此 $u_0(t)$ 因为 $x(t)$ 和 $z(t)$ 均为 $C_p^1[0,1]$ 正解，故 $u_0(t)$ 是边值问题 (1) 一个 $C_p^1[0,1]$ 正解。证毕。

注 3 当 $p(t)=1$ 时，$C_p^1[0,1]$ 正解即为 $C^1[0,1]$ 正解。

最后我们给出本文定理的一个简单应用。

例 考虑下述奇异半正边值问题

$$\begin{cases}-u''(t)=\dfrac{1}{15t(1-t)}u^2-\frac{m}{\sqrt{t}}\arctan u,\quad 0<t<1,\\ u(0)=u(1)=0.\end{cases}\tag{6}$$

Green 函数

$$G(t,s)=\begin{cases}t(1-s),\quad 0\leq t\leq s\leq 1,\\ s(1-t),\quad 0\leq s\leq t\leq 1,\end{cases}$$

$$q(t)=\frac{m\pi}{2\sqrt{t}},\quad\varphi(t)=\frac{1}{15t(1-t)},\quad h(u)=u^2,\quad\varepsilon=1,\quad\xi=\frac{r_1}{2}.$$

由

$$\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{15t(1-t)}u^2}{u}=0$$

可知，对 $\frac{1}{2L}>0$，存在 $r_1>0$，对任意的 $0<u\leq r_1$ 有

$$\frac{1}{15t(1-t)}u^2\leq\frac{u}{2L},\quad L=\max_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s.$$

我们取 $m < \frac{r_1}{2\pi}$，则 $\int_0^1 q(t)\mathrm{d}t = m\pi < \xi$，同时

$$\int_0^1 G(t,t)(\varphi(t)+q(t)) = \frac{1+2m\pi}{15} < \frac{\xi}{\max_{0\le\tau\le\xi} h(\tau)+2},$$

这样条件 (H_1-H_4) 皆满足。根据本文定理 1，又 $p(t)=1$，故边值问题 (6) 至少有一个 $C^1[0,1]$ 正解。

参考文献：

[1] Ma R, Wang R, Ren L. Existence results for semipositone boundary value problems[J]. Acta Math Sci, 2001, 21B: 189-195

[2] Zhao Z Q. Existence and incomparability of positive solutions for second order singular superlinear differential equations[J]. Acta Math Appl Sini, 2006, 29(5): 921-932

[3] Aris R. Introduction to the Analysis of Chemical Reactors[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1965

[4] Agarwal R P, O'Regan D. A note on existence of nonnegative solutions to singular semi-positone problems[J]. Nonlinear Anal, 1999, 36: 615-622

[5] Anuradha V, Hai D D, Shivaji R. Existence results for superlinear semi-positone BVP's[J]. Proceeding of the American Mathematical Society, 1996, 124: 757-764

[6] Xu X. Positive solutions for singular semi-positone boundary value problems[J]. J Math Anal Appl, 2002, 273: 480-491

[7] Xu X. Positive solutions for singular semi-positone three point systems[J]. Nonlinear Anal, 2007, 66: 791-805

[8] Lian H, Ge W. Existence of positive solutions for Sturm-Liouville boundary value problems on the half-line[J]. J Math Anal Appl, 2006, 321: 781-792

[9] Liu Y. Positive solutions of singular semipositone boundary value problems[J]. Acta Math Sci, 2005, 25A(3): 307-314

[10] Zhang X, Zou H, Liu L. Positive solutions of second-order m-point boundary value problems with changing sign singular nonlinearity[J]. Appl Math Lett, 2007, 20: 629-636

[11] Zhang X, Liu L. Positive solutions of superlinear semipositone singular Dirichlet boundary value problems[J]. J Math Anal Appl, 2006, 316: 525-537

Positive Solutions to the Singular Semi-positone Sturm-Liouville Boundary Value Problem

MAO Jin-xiu[1], ZHAO Zeng-qin[1], XU Nai-wei[2]

(1- Department of Mathematics, Qufu Normal University, Qufu 273165;
2- Department of Foundation, Shandong Water Conservation Professional Institute, Rizhao 276826)

Abstract: In this paper, we investigate boundary value problems of super-linear Sturm-Liouville differential equations when the nonlinearity may change sign and may be singular at the endpoints. Existence of at least one positive solutions in a broader sense and the property of the positive solutions of singular semi-positone boundary value problems are obtained by using the fixed point index theory on a cone and the method of transformation. We consider the general form of differential equations and boundary conditions, so the obtained results improve the existing conclusions.

Keywords: singular semi-positone boundary value problem; cone; positive solution

Received: 27 Nov 2007. **Accepted:** 14 Apr 2008.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10871116); the Doctoral Program Foundation of Education Ministry of China (200804460001).